



Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet

Cours : physique générale I

Date : vendredi 20 décembre 2024

Durée : 210 minutes

Examen à blanc - Corrigé

NOM :

PRENOM :

N° SCIPER :

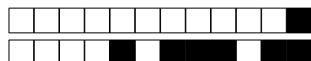
SECTION : **Mathématiques**

SALLE :

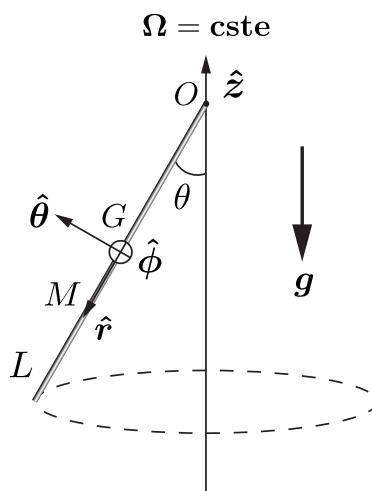
L'examen est constitué de 3 problèmes qui totalisent 39 points. Chaque problème comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques d'un problème doivent être effectués et rédigés proprement sur les pages quadrillées à la fin du problème.

Consignes

- Préparer votre **carte Camipro**, la poser visiblement sur la table et vérifier votre N° Sciper.
- **Attendre** le début de l'épreuve **avant d'ouvrir** le cahier d'examen.
- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Un **dictionnaire bilingue** non annoté est autorisé pour les étudiant.e.s **non francophones**.
- Effectuer les **développements mathématiques et physiques** d'un problème sur les **pages quadrillées** à la fin du problème.
- Retranscrire les **réponses** sur les pointillés sous chaque question dans les espaces réservés à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Ne **pas dégrafer** le cahier d'examen et laisser le **tableau** et les **cases blanches vides**.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas ramassées** et **pas corrigées**.
- Il est recommandé de résoudre les questions **bonus** à la fin de l'examen si le temps le permet.


Problème 1 : Barre en rotation (9 points)
 ₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈ ₉

Laisser les cases blanches vides

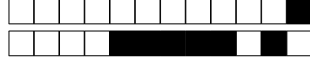


Une barre indéformable et homogène de masse M , de longueur L , d'épaisseur e négligeable, i.e. $e \ll L$, est fixée à l'une de ses extrémité au point O . L'orientation de la barre fait un angle $\theta = \text{cste}$ avec l'axe vertical passant par l'origine O . La barre est en rotation autour de cet axe vertical à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste}$ où $\hat{z}$ est le vecteur unitaire vecteur orienté vers le haut.

Pour décrire la dynamique de la barre en rotation, on considère deux référentiels, on choisit le repère d'inertie sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ le repère d'inertie sphérique lié à la barre. Le moment d'inertie de la barre rapport à l'axe principal d'inertie radial $\hat{r}$ passant par son centre de masse G est négligeable, i.e. $I_{G,r} = 0$. Les moments d'inertie de la barre par rapport aux axes principaux d'inertie nodal $\hat{\theta}$ et azimutal $\hat{\phi}$ passant par son centre de masse G sont égaux et s'écrivent $I_{G,\theta} = I_{G,\phi} = \frac{1}{12} ML^2$. On considère qu'il n'y a pas de frottement.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M , de la longueur L , de la vitesse angulaire scalaire Ω , de la norme du champ gravitationnel g , de l'angle d'inclinaison θ et des vecteurs de base $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ du repère sphérique et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (2 points) Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\mathbf{L}_G$ de la barre évaluée par rapport à son centre de masse G en termes des grandeurs scalaires M , L , Ω , θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$.

Le vecteur vitesse angulaire s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_r \hat{\mathbf{r}} + \Omega_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Omega (-\cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Etant donné que $I_{G,r} = 0$, le moment cinétique $\mathbf{L}_G$ de la barre évaluée par rapport à son centre de masse G s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\mathbf{L}_G = I_{G,\theta} \Omega_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{12} ML^2 \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

2. (2 points) Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O en termes des grandeurs scalaires M , L , Ω , θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$.

Solution 1: Comme l'origine est immobile, i.e. $\mathbf{V}_O = \mathbf{0}$, la vitesse $\mathbf{V}_G$ du centre de masse s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OG} = \Omega (-\cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \frac{L}{2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{L}{2} \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OG} \times M\mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G = \frac{L}{2} \hat{\mathbf{r}} \times \left(-\frac{1}{2} ML \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) + \mathbf{L}_G = \frac{1}{4} ML^2 \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{L}_G$$

ce qui implique que

$$\mathbf{L}_O = \frac{1}{3} ML^2 \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Solution 2: Le théorème d'Huygens-Steiner affirme que le moment d'inertie $I_{O,\theta}$ de la barre par rapport à l'axe principal d'inertie nodal $O\hat{\boldsymbol{\theta}}$ passant par l'origine O s'écrit,

$$I_{O,\theta} = I_{G,\theta} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O s'écrit en coordonnées sphériques comme,

$$\mathbf{L}_O = I_{O,\theta} \Omega_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{3} ML^2 \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

3. (3 points) A l'aide d'un théorème de dynamique du solide indéformable, déterminer l'angle $\theta = \text{cste}$ que fait la barre avec l'axe de rotation vertical en termes de grandeurs scalaires constantes données dans l'énoncé.

La dérivée temporelle du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O s'écrit,

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \frac{1}{3} ML^2 \Omega \sin \theta \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

où la dérivée temporelle du vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est donnée par l'équation de Poisson,

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Omega (-\cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\Omega \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



Par conséquent,

$$\dot{\mathbf{L}}_O = -\frac{1}{3} ML^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\phi}$$

La résultante des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ évaluée par rapport à l'origine O est dû uniquement au poids $M\mathbf{g}$ de la barre appliqué en son centre de masse G . Ainsi,

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{OG} \times M\mathbf{g} = \frac{L}{2} \hat{\mathbf{r}} \times M\mathbf{g} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = -\frac{1}{2} MLg \sin \theta \hat{\phi}$$

Le théorème du moment cinétique évalué au point O ,

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O$$

projeté selon le vecteur unitaire $\hat{\phi}$ tangent à la ligne de coordonnées ϕ se réduit à,

$$\frac{1}{2} g = \frac{1}{3} L \Omega^2 \cos \theta$$

Par conséquent, l'angle de nutation θ entre la barre avec l'axe vertical s'exprime comme,

$$\theta = \arccos \left(\frac{3g}{2L\Omega^2} \right)$$

4. (2 points) Par rapport au référentiel d'inertie du sol, déterminer l'expression de l'énergie cinétique T de la barre en termes des grandeurs scalaires constantes M , L , Ω et θ .

Solution 1: L'énergie cinétique totale T de la barre est la somme de l'énergie cinétique associée au mouvement circulaire du centre de masse autour du point C et de l'énergie cinétique associée à la rotation propre de la barre autour du centre de masse G ,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,\theta} \Omega_\theta^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{L}{2} \Omega \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ML^2 \right) (\Omega \sin \theta)^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale de la barre est,

$$T = \frac{1}{6} ML^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$

Solution 2: L'énergie cinétique totale T de la barre est l'énergie cinétique associée à la rotation de la barre autour de l'origine O à l'extrémité de la barre,

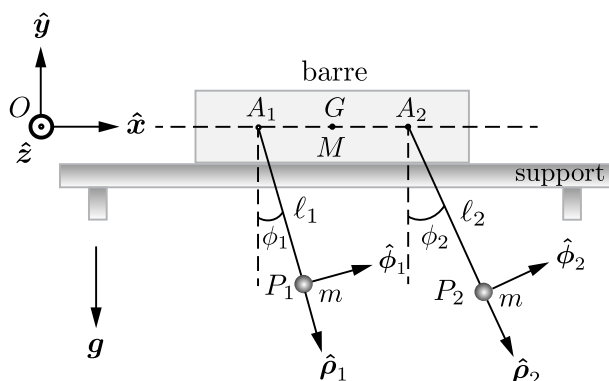
$$T = \frac{1}{2} I_{O,\theta} \Omega_\theta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) (\Omega \sin \theta)^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique totale de la barre est,

$$T = \frac{1}{6} ML^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$


Problème 2 : Pendules couplés par une barre (17 points)

Laisser les cases blanches vides



Afin de modéliser la synchronisation de deux pendules mathématiques, on examine le modèle suivant : deux points matériels P_1 et P_2 de masses identiques m sont suspendus aux extrémités de deux fils inextensibles, de masses négligeables, de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 respectivement. Les fils sont attachés de manière symétrique aux points A_1 et A_2 d'une barre homogène indéformable de masse M et de centre de masse G . La barre peut glisser sur un support fixe horizontal sur lequel elle est posée. On suppose que le frottement entre la barre et le support est négligeable et que le frottement de l'air est également négligeable.

Afin d'étudier la dynamique du système, on considère deux référentiels : le référentiel absolu $\mathcal{R}$ du support fixe et le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ de la barre en mouvement. On choisit un repère cartésien absolu $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ d'origine O pour décrire le mouvement de la barre et deux repères cylindriques relatifs $(\hat{\rho}_1, \hat{\phi}_1, \hat{z})$ et $(\hat{\rho}_2, \hat{\phi}_2, \hat{z})$ d'origines A_1 et A_2 respectivement pour décrire le mouvement des deux pendules.

L'angle moyen ϕ_S et l'angle de déviation moyen ϕ_A des pendules sont définis comme,

$$\phi_S = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \quad \text{et} \quad \phi_A = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)$$

Les réponses doivent être exprimées en termes des masses m et M , des longueurs ℓ_1 et ℓ_2 , de la norme du champ gravitationnel g , des angles ϕ_1 et ϕ_2 , de la coordonnée horizontale du centre de masse de la barre X_G , de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ et $\hat{z}$, et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (1 point) Déterminer la force inertielle $\mathbf{F}_i$ exercée sur les pendules dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ de la barre.

La force inertielle est,

$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A_i) = -m \mathbf{a}_a(G) = -m \ddot{X}_G \hat{\mathbf{x}} = -m \ddot{X}_G (\sin \phi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}_i + \cos \phi_i \hat{\boldsymbol{\phi}}_i) \quad \text{où } i = 1, 2 \quad (1)$$

2. (3 points) Déterminer le vecteur tension $\mathbf{T}_i$ exercée sur le i^{e} pendule dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ de la barre.

Les contraintes géométriques imposées sur les coordonnées cylindriques pour le i^{e} pendule sont les suivantes,

$$\begin{aligned} \rho_i &= \ell_i & \text{ainsi} & \quad \dot{\rho}_i = 0 & \text{et} & \quad \ddot{\rho}_i = 0 \\ z &= 0 & \text{ainsi} & \quad \dot{z} = 0 & \text{et} & \quad \ddot{z} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Compte tenu des contraintes géométriques (2), la vitesse relative $\mathbf{v}_r(P_i)$ et l'accélération relative $\mathbf{a}_r(P_i)$ du i^{e} pendule s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r(P_i) &= \ell_i \dot{\phi}_i \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \\ \mathbf{a}_r(P_i) &= -\ell_i \dot{\phi}_i^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_i + \ell_i \ddot{\phi}_i \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \end{aligned} \quad (3)$$

Le poids du i^{e} pendule est,

$$\mathbf{P}_i = m \mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{y}} = mg (\cos \phi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}_i - \sin \phi_i \hat{\boldsymbol{\phi}}_i) \quad (4)$$

et la tension exercée sur ce pendule s'écrit,

$$\mathbf{T}_i = -T_i \hat{\boldsymbol{\rho}}_i \quad (5)$$

Solution 1: La loi du mouvement relatif du pendule dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ de la barre en translation s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}_i^{\text{in}} = \mathbf{P}_i + \mathbf{T}_i + \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}_r(P_i) \quad (6)$$

En substituant les forces extérieures (4), (5), la force inertielle (1), et l'accélération relative (3) dans la loi du mouvement relatif (6) et en la projetant selon les lignes de coordonnées cylindriques dans le plan vertical, on obtient les équations scalaires suivantes,

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\rho}}_i : \quad mg \cos \phi_i - T_i - m \ddot{X}_G \sin \phi_i = -m \ell_i \dot{\phi}_i^2 \quad (7)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}}_i : \quad -mg \sin \phi_i - m \ddot{X}_G \cos \phi_i = m \ell_i \ddot{\phi}_i \quad (\text{question suivante}) \quad (8)$$

L'équation de contrainte (7) donne la composante radiale de la tension (5),

$$T_i = -m (g \cos \phi_i + \ell_i \dot{\phi}_i^2 - \ddot{X}_G \sin \phi_i) \hat{\boldsymbol{\rho}}_i \quad (9)$$

Solution 2: L'accélération absolue du i^{e} pendule est,

$$\mathbf{a}_a(P_i) = \mathbf{a}_a(G) + \mathbf{a}_r(P_i) = (\ddot{X}_G \sin \phi_i - \ell_i \dot{\phi}_i^2) \hat{\boldsymbol{\rho}}_i + (\ddot{X}_G \cos \phi_i + \ell_i \ddot{\phi}_i) \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \quad (10)$$

La loi du mouvement absolu du i^{e} pendule dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$ du support s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{P}_i + \mathbf{T}_i = m \mathbf{a}_a(P_i) \quad (11)$$

En substituant les forces extérieures (4), (5), et l'accélération absolue (10) dans la loi du mouvement absolu (11) et en la projetant selon les lignes de coordonnées cylindriques, on obtient les équations scalaires suivantes,

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\rho}}_i : \quad mg \cos \phi_i - T_i = m (\ddot{X}_G \sin \phi_i - \ell_i \dot{\phi}_i^2) \quad (12)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}}_i : \quad -mg \sin \phi_i = m (\ddot{X}_G \cos \phi_i + \ell_i \ddot{\phi}_i) \quad (\text{question suivante}) \quad (13)$$

L'équation de contrainte (12) donne la composante radiale de la tension (5),

$$T_i = -m (g \cos \phi_i + \ell_i \dot{\phi}_i^2 - \ddot{X}_G \sin \phi_i) \hat{\boldsymbol{\rho}}_i \quad (14)$$



3. (1 point) Montrer que les équations du mouvement des deux pendules s'écrivent,

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{\ell_1} \sin \phi_1 = -\frac{\ddot{X}_G}{\ell_1} \cos \phi_1 \quad \text{et} \quad \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{\ell_2} \sin \phi_2 = -\frac{\ddot{X}_G}{\ell_2} \cos \phi_2$$

En divisant l'équation du mouvement (8) selon la coordonnée azimutale par $m\ell_i^2$, on obtient,

$$\ddot{\phi}_i + \frac{g}{\ell_i} \sin \phi_i = -\frac{\ddot{X}_G}{\ell_i} \cos \phi_i \quad (15)$$

4. (3 points) Si le système formé de la barre et des deux pendules est initialement au repos, montrer à l'aide d'un principe de conservation, que le système satisfait la relation,

$$\dot{X}_G = -\frac{m}{M+2m} \left(\ell_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \right)$$

La quantité de mouvement des points matériels P_i s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= m \mathbf{v}_a(P_i) = m \mathbf{v}_a(A_i) + m \mathbf{v}_r(P_i) = m \dot{X}_G \hat{\mathbf{x}} + m \ell_i \dot{\phi}_i \hat{\phi}_i \\ &= m \left(\dot{X}_G + \ell_i \dot{\phi}_i \cos \phi_i \right) \hat{\mathbf{x}} + m \ell_i \dot{\phi}_i \sin \phi_i \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (16)$$

La quantité de mouvement de la barre s'écrit,

$$\mathbf{P}_M = M \mathbf{v}_a(G) = M \dot{X}_G \hat{\mathbf{x}} \quad (17)$$

La quantité de mouvement totale du système est la somme des quantités de la barre et des pendules,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{P}_M + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \left((M+2m) \dot{X}_G + m \left(\ell_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \right) \right) \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + m \left(\ell_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \right) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (18)$$

Vu que les forces extérieures exercées sur le système formé de la barre et des deux pendules sont verticales, la composante horizontale de la quantité de mouvement totale du système est constante. Comme le système est initialement à l'équilibre, cette composante est nulle,

$$\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{x}} = (M+2m) \dot{X}_G + m \left(\ell_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \right) = \text{cste} = 0 \quad (19)$$

5. (5 points) Pour cette question et les suivantes, on fait l'approximation des petits angles, c'est-à-dire $\phi_1 \ll 1$ et $\phi_2 \ll 1$, pour des pendules de même longueur, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2 = \ell$. Montrer que dans ce cas l'angle moyen ϕ_S et l'angle de déviation moyen ϕ_A ont un mouvement harmonique oscillatoire,

$$\ddot{\phi}_S + \omega_S^2 \phi_S = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\phi}_A + \omega_A^2 \phi_A = 0$$

et déterminer la pulsation ω_S du mode propre symétrique et la pulsation ω_A du mode propre anti-symétrique.

Dans l'approximation des petits angles,

$$\sin \phi_i \simeq \phi_i \quad \text{et} \quad \cos \phi_i \simeq 1 \quad (20)$$

pour des pendules de longueur égale, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, les équations du mouvement des pendules (15) deviennent,

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{\ell} \phi_1 = -\frac{\ddot{X}_G}{\ell} \quad \text{et} \quad \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{\ell} \phi_2 = -\frac{\ddot{X}_G}{\ell} \quad (21)$$

et la dérivée temporelle de la relation (19) divisée par la somme des masses s'écrit,

$$\ddot{X}_G = -\frac{m}{M+2m} \left(\ell \ddot{\phi}_1 + \ell \ddot{\phi}_2 \right) \quad (22)$$



En substituant l'accélération du centre de masse de la barre dans les équations du mouvement (21), on obtient les résultats suivants,

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1 &= -\frac{g}{\ell} \phi_1 + \frac{m}{M+2m} (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) \\ \ddot{\phi}_2 &= -\frac{g}{\ell} \phi_2 + \frac{m}{M+2m} (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2)\end{aligned}\quad (23)$$

Compte tenu des équations du mouvement (23), la dérivée temporelle seconde de l'angle moyen s'écrit,

$$\ddot{\phi}_S = \frac{1}{2} (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) = -\frac{g}{\ell} \frac{1}{2} (\phi_1 + \phi_2) + \frac{m}{M+2m} (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) = -\frac{g}{\ell} \phi_S + \frac{2m}{M+2m} \ddot{\phi}_S \quad (24)$$

qui peut être mise sous la forme suivante,

$$\ddot{\phi}_S + \frac{M+2m}{M} \frac{g}{\ell} \phi_S = 0 \quad (25)$$

Par conséquent, la pulsation du mode symétrique est,

$$\omega_S = \sqrt{\left(\frac{M+2m}{M}\right) \frac{g}{\ell}} \quad (26)$$

Compte tenu des équations du mouvement (23), la dérivée temporelle seconde de l'angle de déviation s'écrit,

$$\ddot{\phi}_A = \frac{1}{2} (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) = -\frac{g}{\ell} \frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_1) = -\frac{g}{\ell} \phi_A \quad (27)$$

qui peut être mise sous la forme suivante,

$$\ddot{\phi}_A + \frac{g}{\ell} \phi_A = 0 \quad (28)$$

Par conséquent, la pulsation du mode antisymétrique est,

$$\omega_A = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (29)$$

6. (4 points) Déterminer les équations horaires pour les angles $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$, en fonction des pulsations ω_S et ω_A supposées connues, compte tenu des conditions initiales $\phi_1(0) = -\phi_2(0) = -\phi_0$ et $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$.

Les équations horaires pour l'angle moyen et l'angle de déviation sont les suivantes,

$$\phi_S(t) = C_S \cos(\omega_S t + \varphi_S) \quad \text{et} \quad \phi_A(t) = C_A \cos(\omega_A t + \varphi_A) \quad (30)$$

L'équation horaire de l'angle $\phi_1(t)$ s'écrit,

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \frac{1}{2} (\phi_1(t) + \phi_2(t)) - \frac{1}{2} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) = \phi_S(t) - \phi_A(t) \\ &= C_S \cos(\omega_S t + \varphi_S) - C_A \cos(\omega_A t + \varphi_A)\end{aligned}\quad (31)$$

L'équation horaire de l'angle $\phi_2(t)$ s'écrit,

$$\begin{aligned}\phi_2(t) &= \frac{1}{2} (\phi_1(t) + \phi_2(t)) + \frac{1}{2} (\phi_2(t) - \phi_1(t)) = \phi_S(t) + \phi_A(t) \\ &= C_S \cos(\omega_S t + \varphi_S) + C_A \cos(\omega_A t + \varphi_A)\end{aligned}\quad (32)$$

Les équations de la vitesse angulaire des deux pendules sont obtenues en dérivant les équations horaires (31) et (32) par rapport au temps,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1(t) &= -\omega C_S \sin(\omega_S t + \varphi_S) + \omega C_A \sin(\omega_A t + \varphi_A) \\ \dot{\phi}_2(t) &= -\omega C_S \sin(\omega_S t + \varphi_S) - \omega C_A \sin(\omega_A t + \varphi_A)\end{aligned}\quad (33)$$



Compte tenu des conditions initiales pour les vitesses angulaires,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1(0) &= -\omega C_S \sin(\varphi_S) + \omega C_A \sin(\varphi_A) = 0 \\ \dot{\phi}_2(0) &= -\omega C_S \sin(\varphi_S) - \omega C_A \sin(\varphi_A) = 0\end{aligned}\tag{34}$$

on en conclut que les angles de déphasages sont nuls,

$$\sin(\varphi_S) = \sin(\varphi_A) = 0 \quad \text{ainsi} \quad \varphi_S = \varphi_A = 0\tag{35}$$

Compte tenu de ce résultat (35), les conditions initiales sur les angles (31) et (31) donnent le système d'équations suivant,

$$\begin{aligned}\phi_1(0) &= C_S - C_A = -\phi_0 \\ \phi_2(0) &= C_S + C_A = \phi_0\end{aligned}\tag{36}$$

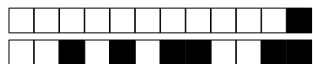
qui implique que,

$$C_A = \phi_0 \quad \text{et} \quad C_S = 0\tag{37}$$

Compte tenu des conditions (35) et (37), les équations horaires (31) et (32) se réduisent à,

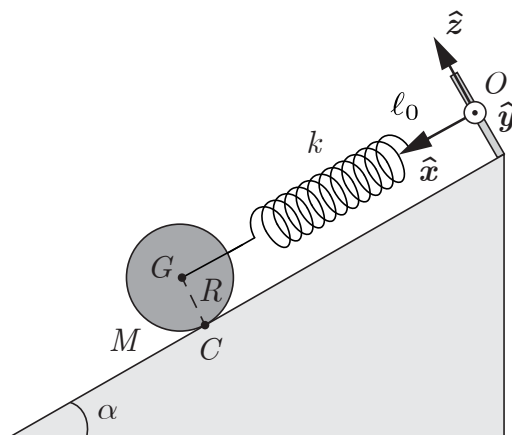
$$\phi_1(t) = -\phi_0 \cos(\omega_A t) \quad \text{et} \quad \phi_2(t) = \phi_0 \cos(\omega_A t)\tag{38}$$

ce qui signifie que les pendules oscillent en opposition de phase selon le mode antisymétrique de pulsation ω_A .


Problème 1 : Cylindre oscillant sur un plan incliné (13 points)

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈ ₉ ₁₀ ₁₁ ₁₂ ₁₃

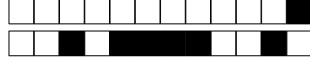
Laisser les cases blanches vides



On considère un cylindre plein, homogène, de rayon R et de masse M qui roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'axe de symétrie horizontal du cylindre qui passe par son centre de masse G est attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée au sommet du plan incliné. Un mécanisme assure que l'axe du cylindre reste horizontal. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie passant par son centre de masse est $I_G = \frac{1}{2} MR^2$. L'origine O est prise au point d'attache du ressort au haut du plan incliné.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cartésiennes x , y et z , de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ du repère cartésien et de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (3 points) Déterminer la norme et l'orientation du moment cinétique $\mathbf{L}_C$ du cylindre évalué par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné.

Comme le mouvement de rotation du cylindre homogène de masse M et de rayon R a lieu autour de son axe de symétrie, son vecteur vitesse angulaire s'écrit,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi} \hat{\mathbf{y}} \quad (39)$$

où ψ est l'angle de rotation propre défini positif pour une rotation dans le sens trigonométrique. La vitesse du centre de masse du cylindre s'écrit,

$$\mathbf{V}_G = \dot{X}_G \hat{\mathbf{x}} \quad (40)$$

La condition de roulement sans glissement du cylindre implique que la vitesse du point de contact s'annule, i.e. $\mathbf{V}_C = \mathbf{0}$. Par conséquent, les vitesses du centre de masse G et du point de contact G sont liés par la relation,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} \quad (41)$$

Compte tenu des vecteurs vitesse angulaire (39) et vitesse du centre de masse (40) et de $\mathbf{CG} = R \hat{\mathbf{z}}$, la condition de roulement sans glissement (41) devient,

$$\dot{X}_G \hat{\mathbf{x}} = (\dot{\psi} \hat{\mathbf{y}}) \times (R \hat{\mathbf{z}}) = R \dot{\psi} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{ainsi} \quad \dot{X}_G = R \dot{\psi} \quad (42)$$

Solution 1: Compte tenu de la condition de roulement sans glissement (42) et du fait que le moment d'inertie du cylindre évalué au centre de masse G est $I_G = \frac{1}{2} MR^2$, son moment cinétique $\mathbf{L}_G$ évalué au centre de masse G s'écrit,

$$\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\psi} \hat{\mathbf{y}} = \frac{1}{2} MR \dot{X}_G \hat{\mathbf{y}} \quad (43)$$

Le théorème de transfert du moment cinétique entre les points G et C s'écrit,

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_G + \mathbf{CG} \times M \mathbf{V}_G = \frac{1}{2} MR \dot{X}_G \hat{\mathbf{y}} + (R \hat{\mathbf{z}}) \times (M \dot{X}_G \hat{\mathbf{x}}) = \frac{3}{2} MR \dot{X}_G \hat{\mathbf{y}} \quad (44)$$

Solution 2: A l'aide du théorème de Huygens-Steiner, le moment d'inertie I_C du cylindre autour de l'axe horizontal parallèle à l'axe de symétrie qui passe par le point de contact C est donné par,

$$I_C = I_G + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2 \quad (45)$$

Compte tenu de la condition de roulement sans glissement (42) et du fait que le moment d'inertie du cylindre évalué au centre de masse G est $I_G = \frac{1}{2} MR^2$, son moment cinétique $\mathbf{L}_C$ évalué au point de contact C s'écrit,

$$\mathbf{L}_C = I_C \boldsymbol{\Omega} = \frac{3}{2} MR^2 \dot{\psi} \hat{\mathbf{y}} = \frac{3}{2} MR \dot{X}_G \hat{\mathbf{y}} \quad (46)$$

2. (3 points) Déterminer la norme et l'orientation de la résultante des moments de forces extérieures $\mathbf{M}_C^{\text{ext}}$ évaluée par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné explicitement en fonction de M et k .

Les forces extérieures qui donnent lieu à des moments de forces non-nuls par rapport au point de contact C sont le poids $\mathbf{P}$ du cylindre et la force élastique $\mathbf{F}_e$ exercée par le ressort,

$$\mathbf{P} = Mg \hat{\mathbf{g}} = Mg (\sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_e = -k (X_G - \ell_0) \hat{\mathbf{x}} \quad (47)$$

Ces deux forces extérieures sont exercées sur le centre de masse G du cylindre. Par conséquent, compte tenu du poids et de la force élastique (47), la résultante des moments de forces extérieures évaluée au point de contact C s'écrit,

$$\mathbf{M}_C^{\text{ext}} = \mathbf{CG} \times \mathbf{P} + \mathbf{CG} \times \mathbf{F}_e = (R \hat{\mathbf{z}}) \times Mg (\sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) - (R \hat{\mathbf{z}}) \times k (X_G - \ell_0) \hat{\mathbf{x}} \quad (48)$$

et se réduit à,

$$\mathbf{M}_C^{\text{ext}} = (MgR \sin \alpha - kR (X_G - \ell_0)) \hat{\mathbf{y}} \quad (49)$$



3. (3 points) Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre et en déduire la période d'oscillation T .

Solution 1: La dérivée temporelle du moment cinétique du cylindre évalué au point de contact C est obtenue en dérivant l'équation (46) par rapport au temps,

$$\dot{\mathbf{L}}_C = \frac{3}{2} MR \ddot{X}_G \hat{\mathbf{y}} \quad (50)$$

Le théorème du moment cinétique évalué au point de contact C s'écrit,

$$\sum \mathbf{M}_C^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_C \quad (51)$$

Compte tenu des équations (49) et (50), la projection du théorème du moment cinétique (51) selon la ligne de coordonnée d'ordonnée donne l'équation du mouvement du centre de masse,

$$\frac{3}{2} MR \ddot{X}_G = MgR \sin \alpha - kR (X_G - \ell_0) \quad (52)$$

qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\ddot{X}_G + \frac{2k}{3M} \left(X_G - \ell_0 - \frac{Mg}{k} \sin \alpha \right) = 0 \quad (53)$$

Solution 2: L'énergie cinétique totale du cylindre est la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation propre. Compte tenu des équations (39) et (40), l'énergie cinétique totale s'écrit,

$$T = \frac{1}{2} MV_G^2 + \frac{1}{2} I_G \Omega^2 = \frac{1}{2} M \dot{X}_G^2 + \frac{1}{4} MR^2 \dot{\psi}^2 = \frac{3}{4} M \dot{X}_G^2 \quad (54)$$

L'énergie potentielle totale est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur V_g et de l'énergie potentielle élastique V_e . En prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort à vide au repos, l'énergie potentielle totale s'écrit,

$$V = V_g + V_e = -MgX_G \sin \alpha + \frac{1}{2} k (X_G - \ell_0)^2 \quad (55)$$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique totale et de l'énergie potentielle totale,

$$E = T + V = \frac{3}{4} M \dot{X}_G^2 - MgX_G \sin \alpha + \frac{1}{2} k (X_G - \ell_0)^2 \quad (56)$$

Comme il n'y a pas de force dissipative, l'énergie mécanique est conservée. Ainsi, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique (56) est nulle,

$$\dot{E} = \frac{3}{2} M \dot{X}_G \ddot{X}_G - Mg \sin \alpha \dot{X}_G + k (X_G - \ell_0) \dot{X}_G = 0 \quad (57)$$

En divisant l'équation (57) par $\frac{3}{2} M \dot{X}_G$ on obtient l'équation du mouvement du centre masse,

$$\ddot{X}_G + \frac{2k}{3M} \left(X_G - \ell_0 - \frac{Mg}{k} \sin \alpha \right) = 0 \quad (58)$$

A l'aide de la déviation de la position du centre de masse par rapport à l'équilibre,

$$Y_G = X_G - \ell_0 - \frac{Mg}{k} \sin \alpha \quad \text{ainsi} \quad \ddot{Y}_G = \ddot{X}_G \quad (59)$$

l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre (58) est mise sous la forme d'un oscillateur harmonique,

$$\ddot{Y}_G + \omega_G^2 Y_G = 0 \quad \text{où} \quad \omega_G = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \quad (60)$$

Ainsi la période d'oscillation est,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_G} = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}} \quad (61)$$



4. (2 points) Déterminer l'évolution temporelle $X_G(t)$ de la coordonnée d'abscisse du centre de masse du cylindre compte tenu des conditions initiales suivantes,

$$X_G(0) = R + \ell_0 + \frac{Mg}{k} \sin \alpha \quad \text{et} \quad \dot{X}_G(0) = 0 \quad (62)$$

La solution de l'équation du mouvement harmonique oscillatoire (60) est,

$$Y_G(t) = C_G \cos(\omega_G t + \varphi_G) \quad (63)$$

Compte tenu du changement de variable (59), la coordonnée de position d'abscisse du centre de masse s'écrit,

$$X_G(t) = C_G \cos(\omega_G t + \varphi_G) + \ell_0 + \frac{Mg}{k} \sin \alpha \quad (64)$$

et sa dérivée temporelle s'écrit,

$$\dot{X}_G(t) = -\omega_G C_G \sin(\omega_G t + \varphi_G) \quad (65)$$

Compte tenu de la deuxième condition initiale,

$$\dot{X}_G(0) = -\omega_G C_G \sin(\varphi_G) = 0 \quad \text{ainsi} \quad \varphi_G = 0 \quad (66)$$

Alors, compte tenu de la première condition initiale,

$$X_G(0) = C_G + \ell_0 + \frac{Mg}{k} \sin \alpha = R + \ell_0 + \frac{Mg}{k} \sin \alpha \quad \text{ainsi} \quad C_G = R \quad (67)$$

A l'aide de la pulsation (60) et des conditions (66) et (67), la coordonnée de position d'abscisse du centre de masse (64) s'écrit explicitement,

$$X_G(t) = R \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{3M}} t\right) + \ell_0 + \frac{Mg}{k} \sin \alpha \quad (68)$$

5. (2 points) Déterminer l'évolution temporelle $F_s(t)$ de la composante de la force de frottement statique $\mathbf{F}_s(t) = F_s(t) \hat{\mathbf{x}}$ exercée par le plan incliné sur le cylindre en fonction de la coordonnée de position du centre de masse $X_G(t)$.

Les forces extérieures exercées sur le cylindre sont son poids $\mathbf{P} = Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \cos \alpha \hat{\mathbf{z}})$, la force élastique du ressort $\mathbf{F}_e = -k(X_G - \ell_0) \hat{\mathbf{x}}$, la force de réaction normale du plan $\mathbf{N} = N \hat{\mathbf{z}}$ et la force de frottement statique $\mathbf{F}_s = F_s(t) \hat{\mathbf{x}}$. Le théorème du centre de masse s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_e + \mathbf{N} + \mathbf{F}_s = M \mathbf{A}_G \quad (69)$$

où l'accélération du centre de masse G est $\mathbf{A}_G = \ddot{X}_G \hat{\mathbf{x}}$. La projection du théorème du centre de masse selon la ligne de coordonnée d'abscisse s'écrit,

$$Mg \sin \alpha - k(X_G - \ell_0) + F_s = M \ddot{X}_G \quad (70)$$

Ainsi, compte tenu de l'équation du mouvement (58), la composante d'abscisse de la force de frottement statique s'écrit,

$$F_s(t) = M \ddot{X}_G(t) + k\left(X_G(t) - \ell_0 - \frac{Mg}{k} \sin \alpha\right) = \frac{k}{3}\left(X_G(t) - \ell_0 - \frac{Mg}{k} \sin \alpha\right) \quad (71)$$

Finalement, compte tenu de l'équation horaire (68), l'évolution temporelle de cette composante est donnée par,

$$F_s(t) = \frac{1}{3} k R \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{3M}} t\right) \quad (72)$$